Series de números reales

Aquiles alcanzó a la tortuga y se sentó confortablemente sobre su espalda. “¿De modo que has llegado al final de nuestra carrera?– dijo la tortuga –. ¿A pesar de que realmente consiste en una *serie infinita* de distancias? Yo creía que algún necio había demostrado que esto no podía hacerse”.

Lewis Carroll

Introducción

En este capítulo continuamos con el estudio de las sucesiones empezado en el Capítulo 4. La novedad es que ahora vamos a considerar un tipo *particular* de sucesiones que, sin exagerar, puede afirmarse que son las más útiles del Cálculo. Estas sucesiones se llaman *series*. Lo más llamativo en el estudio de las *series* es el punto de vista que se adopta en el mismo; a saber: se trata de estudiar *una sucesión a partir del conocimiento que se tiene de otra sucesión*. Precisemos estas ideas.

Dada una sucesión, $\{a_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{A_n\}$, cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de $\{a_n\}$, es decir:

$$A_1 = a_1,\ A_2 = a_1 + a_2,\ A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Pues bien, la sucesión así obtenida se llama *serie de término general* a_n.

Al estudiar las sucesiones vimos algunos ejemplos importantes de series como la serie geométrica $\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$, y la serie armónica $\{1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n\}$.

La característica que distingue el estudio de las series es la siguiente: se trata de deducir propiedades de la serie $\{A_n\} = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$, a partir del comportamiento de $\{a_n\}$; es decir: los resultados de la teoría de series dan información sobre la sucesión $\{A_n\}$ haciendo hipótesis sobre la sucesión $\{a_n\}$. ¿Por qué esto es así?, ¿no sería más lógico, puesto que lo que queremos es estudiar la serie $\{A_n\}$, hacer hipótesis directamente sobre ella? La razón de esta forma de proceder es que, por lo general, no se conoce una expresión de $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ que permita hacer su estudio de forma directa; es decir, la suma

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ no es posible "realizarla" en la práctica. Por ello, en el estudio de las series se supone implícitamente que *la sucesión* $\{a_n\}$ *es el dato que podemos utilizar*. Naturalmente, esto hace que el estudio de las series se preste a muchas confusiones porque, aunque su objetivo es obtener propiedades de la serie $\{A_n\}$, las hipótesis hacen siempre referencia a la sucesión $\{a_n\}$. Si bien lo pensamos, esta forma de proceder no es del todo nueva. Ya estás acostumbrado a usar la derivada de una función para estudiar propiedades de la función; pues bien, la situación aquí es parecida: para estudiar la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ (la función) estudiamos la sucesión $\{a_n\}$ (la derivada).

Conceptos y resultados básicos

Todas las sucesiones que vamos a considerar en lo que sigue son sucesiones de números reales por lo que evitaremos esa innecesaria precisión.

Definición

Dada una sucesión $\{a_n\}$, la sucesión $\{A_n\}$ definida por:

$$A_1 = a_1,\ \ A_{n+1} = a_{n+1} + A_n \qquad \text{para todo } \ n \in \mathbb{N}$$

se llama **serie de término general** a_n.

Debe quedar claro desde ahora que una serie es una sucesión cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de otra sucesión.

Convenio de notación

Usaremos la notación $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ para representar la serie de término general a_n.

Ni que decir tiene que, siendo las series sucesiones, *todos los conceptos y resultados estudiados ya para sucesiones conservan su misma significación cuando se aplican a series*. Por tanto, es innecesario volver a definir qué se entiende cuando se dice que una serie es "convergente", o "divergente positivamente", o "acotada".

Serie armónica

Se llama así la serie de término general $1/n$; es decir, la serie $\{1 + 1/2 + \cdots + 1/n\}$. Se verifica que la serie armónica diverge positivamente; de hecho, dicha serie es asintóticamente equivalente a la sucesión $\{\log n\}$.

Serie armónica alternada

Se llama así la serie de término general $\{(-1)^{n+1}/n\}$; es decir, la serie:

$$\left\{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}.$$

La serie armónica alternada es convergente y su límite es igual a $\log 2$.

Demostración

Pongamos $A_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Puesto que $\left\{A_{2n}-A_{2n-1}\right\}\to 0$, bastará probar que $\left\{A_{2n}\right\}\to\log 2$. Tenemos que:

$$A_{2n}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{(-1)^{j+1}}{j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j-1}+\sum_{j=1}^{n}\frac{-1}{2j}=H_{2n}-H_n$$

donde $H_n = 1+1/2+\cdots+1/n$. Sea $\gamma_n = H_n-\log n$. Sabemos que la sucesión $\{\gamma_n\}$ es convergente (su límite es la constante γ de Euler). Finalmente, como

$$A_{2n}=H_{2n}-H_n=\log(2n)-\log n+\gamma_{2n}-\gamma_n=\log 2+\gamma_{2n}-\gamma_n$$

concluimos que $\left\{A_{2n}\right\}\to\log 2$.

Serie geométrica

Dado $x\in\mathbb{R}$, la sucesión $\{1+x+x^2+\cdots+x^n\}$ se llama serie geométrica de razón x. Dicha serie converge si, y sólo si, $|x|<1$, en cuyo caso su límite es igual a $\dfrac{1}{1-x}$.

Todas las afirmaciones hechas se deducen de que si $x\neq 1$, se tiene:

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Condición necesaria para la convergencia de una serie

Para que la serie $\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}$ sea convergente es necesario que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración

Pongamos $A_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$, y supongamos que $\{A_n\}$ es convergente. Entonces se tiene que

$$0=\lim\left\{A_{n+1}\right\}-\lim\{A_n\}=\lim\left\{A_{n+1}-A_n\right\}=\lim\{a_n\}.$$

La serie armónica prueba que esta condición necesaria de convergencia no es suficiente.

Criterios de convergencia para series de términos positivos

Una serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ tal que $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que es una *serie de términos positivos*. Nótese que una serie de términos positivos es una sucesión creciente, por lo que deducimos el siguiente criterio de convergencia.

Criterio básico de convergencia

Una serie de términos positivos, $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$, es convergente si, y sólo si, está mayorada, es decir, existe un número $M > 0$, tal que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, en cuyo caso se tiene que

$$\text{lím}\,\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\} = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} a_j \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Nótese que una serie de términos positivos que no es convergente es positivamente divergente. El criterio básico de convergencia da lugar al siguiente *criterio de comparación*, sin duda uno de los más útiles.

Criterio de comparación

Sean $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ y $\{b_1 + b_2 + \cdots + b_n\}$ dos series de términos positivos. Supongamos que hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leqslant b_n$ para todo $n > k$. Se verifica que:

i) Si la serie $\{b_1 + b_2 + \cdots + b_n\}$ es convergente, también $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es convergente.

ii) Si la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es divergente, también la serie $\{b_1 + b_2 + \cdots + b_n\}$ es divergente.

Demostración

i) Pongamos $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Las hipótesis hechas implican que para todo $n > k$ es $A_n \leqslant B_n + A_k$. Deducimos que si $\{B_n\}$ está mayorada también lo está $\{A_n\}$.

El punto ii) se deduce de i).

Criterio de comparación por paso al límite

Dadas dos series de términos positivos $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ y $\{b_1 + b_2 + \cdots + b_n\}$, tales que $\{a_n/b_n\} \to L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$ se verifica:

a) Si $L=+\infty$ y $\{b_1+b_2+\cdots+b_n\}$ es divergente también $\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}$ es divergente.

b) Si $L=0$ y $\{b_1+b_2+\cdots+b_n\}$ es convergente también $\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}$ es convergente.

c) Si $L\in\mathbb{R}^+$ las series $\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}$ y $\{b_1+b_2+\cdots+b_n\}$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

Demostración

Supongamos que $L\in\mathbb{R}^+$. Sea $0<\alpha<L<\beta$. Todos los términos de la sucesión $\{a_n/b_n\}$, a partir de uno en adelante, están en el intervalo $]\alpha,\beta[$, es decir, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geqslant k$ es $\alpha<a_n/b_n<\beta$, y, por tanto, $\alpha b_n<a_n<\beta b_n$. Concluimos, por el criterio de comparación, que la convergencia de una de las series implica la convergencia de la otra. Queda, así, probado el punto c) del enunciado. Los puntos a) y b) se prueban de manera parecida.

Criterio integral

Sea $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ una función continua, decreciente y positiva. Se verifica entonces que la serie $\{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)\}$ converge si, y sólo si, la integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ es convergente, es decir el límite

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)\,dt$$

es finito.

Demostración

Sea $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$. Nótese que, por ser f positiva, F es creciente. Ahora, por ser f decreciente, se tiene que:

$$\begin{aligned} f(2)+f(3)+\cdots+f(n+1) &\leqslant \int_1^2 f(t)\,dt+\int_2^3 f(t)\,dt+\cdots+\int_n^{n+1} f(t)\,dt= \\ &=\int_1^{n+1} f(t)\,dt\leqslant f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n) \end{aligned}$$

Deducimos que la sucesión $\{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)\}$ está mayorada si, y sólo si, existe $M>0$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ es $F(n)=\displaystyle\int_1^n f(t)\,dt\leqslant M$, lo que equivale a que la función F esté mayorada y, por tanto, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=\sup\{F(x):x\in\mathbb{R}^+\}<+\infty$.

Vamos a introducir a continuación una familia de series, llamadas *series de Riemann*, que se utilizan frecuentemente para comparar otras series con ellas.

Series de Riemann

Dado un número real α, la serie $\{1+1/2^\alpha+1/3^\alpha+\cdots+1/n^\alpha\}$ se llama serie de Riemann de exponente α. Dicha serie es convergente si, y sólo si, $\alpha>1$.

Demostración

Si $\alpha\leqslant 0$, $\{1/n^\alpha\}$ no converge a cero y, por tanto, la serie $\{1+1/2^\alpha+1/3^\alpha+\cdots+1/n^\alpha\}$ es divergente. Si $\alpha>0$, podemos aplicar el criterio integral tomando $f(x)=1/x^\alpha$, con lo que

$$F(x)=\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt=\begin{cases}\log x, & \text{si } \alpha=1;\\ \dfrac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}-\dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{si } \alpha\neq 1.\end{cases}$$

En consecuencia, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)<+\infty$ si, y sólo si, $1-\alpha<0$.

Si en el criterio de comparación por paso al límite hacemos $b_n=1/n^\alpha$, obtenemos el siguiente criterio de convergencia.

Criterio de Prinsheim

Sea $\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}$ una serie de términos positivos, α un número real y supongamos que $\{n^\alpha a_n\}\to L\in\mathbb{R}_o^+\cup\{+\infty\}$. Entonces:

i) Si $L=+\infty$ y $\alpha\leqslant 1$, $\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}$ es divergente.

ii) Si $L=0$ y $\alpha>1$, $\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}$ es convergente.

iii) Si $L\in\mathbb{R}^+$, $\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}$ converge si $\alpha>1$ y diverge si $\alpha\leqslant 1$.

Series de Bertrand

Dados dos números reales α y β, la serie

$$\left\{\frac{1}{2^\alpha(\log 2)^\beta}+\frac{1}{3^\alpha(\log 3)^\beta}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}\right\}$$

converge si $\alpha>1$ cualquiera sea β, y también si $\alpha=1$ y $\beta>1$. En cualquier otro caso es divergente.

Demostración
Sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\log n)^{\mu}}{n^{\rho}} = 0$, cualesquiera sean $\rho > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$. Supongamos que $\alpha > 1$ y sea λ un número verificando que $1 < \lambda < \alpha$. Entonces

$$n^{\lambda} \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}} = \frac{(\log n)^{\mu}}{n^{\rho}}$$

donde $\rho = \alpha - \lambda$, $\mu = -\beta$, y deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} n^{\lambda} \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}} = 0.$$

El criterio de Prinsheim implica que la serie $\left\{ \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^{\alpha}(\log k)^{\beta}} \right\}$ es convergente.

Si $\alpha < 1$ un razonamiento parecido muestra que la serie diverge cualquiera sea β.

Sea ahora $\alpha = 1$. Entonces, si $\beta \leqslant 0$, tenemos que $\dfrac{1}{n(\log n)^{\beta}} \geqslant \dfrac{1}{n}$ para todo $n \geqslant 3$, y el criterio de comparación implica que la serie es divergente. Si $\beta > 0$ podemos aplicar el criterio integral con $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(\log(x+1))^{\beta}}$, con lo que

$$F(x) = \int_{1}^{x} f(t)\,dt = \frac{\log(x+1))^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\log 2)^{1-\beta}}{1-\beta}$$

si $\beta \neq 1$ y $F(x) = \log(\log(x+1)) - \log(\log 2))$ si $\beta = 1$. Por tanto, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) < +\infty$ si, y sólo si, $1 - \beta < 0$.

Vamos a estudiar a continuación dos criterios de convergencia que se aplican a series que pueden compararse con una serie geométrica. Observemos que la serie geométrica de término general $a_n = x^n$, donde $x > 0$, converge si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = x < 1$. Esto nos lleva a considerar, en el caso general de una serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ de términos positivos, el comportamiento de la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$.

Criterio del cociente o de D'Alembert (1768)
Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que existe

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

Entonces se verifica que:

a) Si $L < 1$ la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es convergente;

b) Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, entonces $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es divergente.

Demostración

i) Sea λ un número tal que $L < \lambda < 1$. La definición de límite implica que existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_o$ se verifica que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \lambda$, con lo que:

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\frac{a_{n_o+1}}{a_{n_o}}a_{n_o} \leqslant \lambda^{n+1-n_o}a_{n_o} = \frac{a_{n_o}}{\lambda^{n_o}}\lambda^{n+1}$$

y como, por ser $0 < \lambda < 1$, la serie geométrica de razón λ es convergente, deducimos, en virtud del criterio de comparación, que $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es convergente.

ii) Basta notar que la hipótesis hecha implica que la sucesión $\{a_n\}$ no converge a cero.

Puesto que la serie geométrica de término general $a_n = x^n$, donde $x > 0$, converge si $\sqrt[n]{a_n} = x < 1$, esto nos lleva, en el caso general de una serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ de términos positivos, a considerar el comportamiento de la sucesión $\{\sqrt[n]{a_n}\}$.

Criterio de la raíz o de Cauchy (1821)

Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a_n \geqslant 0$, y que existe

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

Entonces se verifica que:

a) Si $L < 1$ la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es convergente;

b) Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, entonces $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es divergente.

Demostración

i) Sea λ un número tal que $L < \lambda < 1$. La definición de límite implica que existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_o$ es $\sqrt[n]{a_n} \leqslant \lambda$, es decir, $a_n \leqslant \lambda^n$. Puesto que $0 < \lambda < 1$, la serie geométrica de razón λ es convergente y, en virtud del criterio de comparación, se sigue que $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es convergente.

ii) Basta notar que la hipótesis hecha implica que la sucesión $\{a_n\}$ no converge a cero.

Es importante observar que ni el criterio del cociente ni el de la raíz permiten deducir la convergencia o divergencia de una serie cuando $L = 1$. Sabemos que si $\lim\{a_{n+1}/a_n\} = 1$ entonces también $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$. En estos casos suele ser útil el siguiente criterio de convergencia.

Criterio de Raabe (1832)
Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y sea $R_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Se verifica que:

i) Si $\{R_n\} \to L$, donde $L > 1$ o $L = +\infty$, la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es convergente.

ii) Si $\{R_n\} \to L$, donde $L < 1$ o $L = -\infty$, o bien si existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $R_n \leqslant 1$ para todo $n \geqslant k$, entonces la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es divergente.

Demostración
i) Las hipótesis hechas implican que existen $\alpha > 1$ y $n_o \in \mathbb{N}$ tales que para todo $n \geqslant n_o$ es $R_n \geqslant \alpha$. Sea $\delta = \alpha - 1 > 0$. Tenemos que

$$R_n - 1 = (n-1) - n\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \delta \quad (n \geqslant n_o)$$

por lo que

$$a_n \leqslant \frac{1}{\delta}\big((n-1)a_n - na_{n+1}\big) \quad (n \geqslant n_o).$$

Como $a_n > 0$, deducimos que $na_{n+1} < (n-1)a_n$ para todo $n \geqslant n_o$. Así la sucesión $\{na_{n+1}\}$ es decreciente para $n \geqslant n_o$ y, como es de números positivos, deducimos que es convergente. Sea $\gamma = \lim\{na_{n+1}\} = \inf\{na_{n+1} : n \geqslant n_o\}$. Tenemos que

$$\sum_{j=n_o}^{n} a_n \leqslant \frac{1}{\delta}\big((n_o - 1)a_{n_o} - na_{n+1}\big) \leqslant \frac{1}{\delta}\big((n_o - 1)a_{n_o} - \gamma\big)$$

y, por el criterio general de convergencia para series de términos positivos, deducimos que $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es convergente (lo que, dicho sea de paso, implica que $\gamma = 0$).
ii) Si $R_n \leqslant 1$ para todo $n \geqslant k$, entonces $(n-1)a_n - na_{n+1} \leqslant 0$ y resulta que la sucesión $\{na_{n+1}\}$ es creciente para $n \geqslant k$, luego $na_{n+1} \geqslant ka_{k+1}$, es decir, $a_{n+1} \geqslant ka_{k+1}\dfrac{1}{n}$ para todo $n \geqslant k$, y, por el criterio de comparación, deducimos que $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es divergente.

La utilidad de los criterios de convergencia para series de términos positivos se debe en gran parte al siguiente resultado.

Proposición

Si la serie $\{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|\}$ es convergente entonces también es convergente la serie $\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}$.

Demostración

Pongamos $A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $B_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$. Puesto que $\{B_n\}$ es convergente, dado $\varepsilon>0$, la condición de Cauchy nos dice que existe $n_o\in\mathbb{N}$ tal que

$$\left|B_q-B_p\right|=\sum_{k=p+1}^{q}|a_k|<\frac{\varepsilon}{2},\ \text{ para todos }\ p,q\in\mathbb{N}\text{ tales que }\ q>p\geqslant n_o.$$

Deducimos que para todos $p,q\in\mathbb{N}$ tales que $q>p\geqslant n_o$ se verifica que

$$\left|A_q-A_p\right|=\left|a_{p+1}+a_{p+2}+\cdots+a_q\right|\leqslant\sum_{k=p+1}^{q}|a_k|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Lo que prueba que la serie $\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}$ cumple la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente.

Es usual utilizar la siguiente terminología.

Convergencia absoluta

Se dice que la serie $\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}$ es **absolutamente convergente**, si la serie de término general $|a_n|$, es decir la sucesión $\{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|\}$, es convergente.

Con esta terminología, la proposición anterior afirma que una serie absolutamente convergente es convergente. Ahora bien, hay que advertir que una serie puede ser convergente y no ser absolutamente convergente. La serie armónica alternada es un ejemplo de este comportamiento.

Los criterios de convergencia para series de términos positivos se aplican, obvio es decirlo, para estudiar la convergencia absoluta de cualquier serie. Pero, ¿qué hacer cuando una serie no es absolutamente convergente? Naturalmente, podemos intentar comprobar si la serie verifica la condición de Cauchy, pero este procedimiento con frecuencia es complicado. Afortunadamente, se conocen criterios que proporcionan información sobre la convergencia no absoluta. No estudiaremos, por ahora, tales criterios generales y nos limitaremos a considerar unas series particulares conocidas como **series alternadas**. Se llaman así las series de la forma $\{a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n+1}a_n\}$ donde $a_n\geqslant 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Criterio de Leibnitz

Supongamos que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y convergente a cero. Entonces la serie alternada $\{a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n\}$ es convergente.

Además, si $A_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n$ y $S = \text{lím}\{A_n\}$, se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$ que $|S - A_n| \leqslant a_{n+1}$.

Demostración

Es inmediato comprobar que la sucesión $\{A_{2n-1}\}$ es decreciente y $\{A_{2n}\}$ es creciente. Como $A_2 \leqslant A_{2n} \leqslant A_{2n-1} \leqslant A_1$, deducimos que ambas sucesiones convergen. Además, como $A_{2n-1} - A_{2n} = a_{2n} \to 0$, concluimos que A_n converge.

Sea $S = \text{lím}\{A_n\}$. Puesto que

$$S = \text{lím}\{A_{2n-1}\} = \inf\{A_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\} = \text{lím}\{A_{2n}\} = \sup\{A_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$$

se sigue que $A_{2p} \leqslant S \leqslant A_{2q+1}$, $(p, q \in \mathbb{N})$, de donde:

$$0 \leqslant S - A_{2n} \leqslant a_{2n+1}, \quad \text{y} \quad -a_{2n} \leqslant S - A_{2n-1} \leqslant 0$$

es decir, $|S - A_n| \leqslant a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Terminología y notaciones tradicionales para series

La terminología y la notación que se usan para series son, con frecuencia, confusas pero es conveniente conocerlas pues son las que aparecen en casi todos los textos. De hecho, el propio concepto de serie suele definirse de forma bastante confusa, unas veces como un par de sucesiones y otras como una suma infinita. Si en un libro lees una definición de serie de este estilo lo mejor es que no le hagas ningún caso.

Respecto a la notación usada, para empezar, la serie de término general a_n que hemos notado como $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$, suele representarse por los símbolos $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, y también por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. El primero, pese a su ambigüedad, puede ser aceptable. No así el segundo por lo que ahora se dirá. Es frecuente llamar al número $A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ **suma parcial n-ésima** de la serie y, cuando la serie es convergente, a su límite se le llama **suma de la serie** que ¡también! suele representarse por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. De esta manera en muchos textos un número, $\text{lím}\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$, y una sucesión, $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$, se representan igual, lo que no es aceptable.

Nótese que el límite de una serie convergente, $L = \lim\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$, no es, como a veces se dice, la "suma de los infinitos términos" de la sucesión $\{a_n\}$. ¿Qué sentido tiene eso de "sumar infinitos términos"? Ninguno, desde luego. Lo que dicho número L verifica es que $\left|L - \sum_{j=1}^{n} a_j\right|$ se conserva menor que cualquier número $\varepsilon > 0$, a partir de un cierto $n \in \mathbb{N}$ en adelante. Si bien, puede ser sugerente la interpretación de L como "la suma de los términos de la sucesión $\{a_n\}$" no hay que olvidar que esto no es más que una forma de hablar, y que el límite de una serie convergente es, justamente, el límite de una sucesión y no debe confundirse con una operación algebraica.

Una notación cómoda y matemáticamente correcta para la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es $\sum_{n\geqslant 1} a_n$. *Cuando dicha serie sea convergente*, representaremos su límite por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n\geqslant 1} a_n \,.$$

Nótese que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ **es la sucesión que a cada** $n \in \mathbb{N}$ **hace corresponder el número** $\sum_{j=1}^{n} a_j$ y que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j$. En consecuencia el símbolo $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ siempre tiene sentido (es una sucesión) pero el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sólo tiene sentido si la serie converge. El posible inconveniente de estas notaciones es que centran demasiado la atención en la sucesión $\{a_n\}$ con lo que se corre el riesgo de olvidar que lo que estamos estudiando es la sucesión $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$.

Decíamos al principio de esta introducción que las series son "un tipo *particular* de sucesiones". Pues bien, esto no es del todo cierto: *cualquier sucesión puede considerarse como una serie*. En efecto, dada una sucesión, $\{x_n\}$, definamos la sucesión $\{y_n\}$ por $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - x_1$ y, en general, $y_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es evidente que la sucesión $\{x_n\} = \{y_1 + y_2 + \cdots + y_n\}$ es la serie de término general y_n. En resumen, series y sucesiones son lo mismo: toda serie es una sucesión y toda sucesión es una serie. **Lo que distingue a la teoría de series es el punto de vista específico de su estudio**, pero sus resultados pueden aplicarse a cualquier sucesión.